Vereniging In Beweging

Biomechanica, 24 maart 2014, deeltentamen 1

Antwoorden en uitwerkingen staan op de laatste pagina's van dit document

Succes met de voorbereiding!

FACULTEIT DER BEWEGINGSWETENSCHAPPEN, VRIJE UNIVERSITEIT AMSTERDAM
TENTAMEN BIOMECHANICA 2013-2014, DEEL 1, 24 MAART 2014, VERSIE B

Naam: .... Studentnummer: ....

INSTRUCTIE

- Dit is een gesloten boek tentamen
- Gebruik van een gewone (*geen grafische*) rekenmachine is toegestaan
- Gebruik van enig ander hulpmiddel is NIET toegestaan
- Schakel je telefoon volledig uit
- Beschikbare tijd voor dit tentamen: 90 minuten (anderhalf uur)
- DEEL A bestaat uit waar/onwaar stellingen
- DEEL B bestaat uit vraagstukken waarbij alleen het eindantwoord moet worden gegeven
- DEEL C bestaat uit open vraagstukken waarbij ook de uitwerking moet worden gegeven
- Verdeel de beschikbare tijd verstandig over de vraagstukken
- Lees elk vraagstuk goed door voordat je met beantwoording begint
- Heb je een vraag over een vraagstuk, stel deze vraag dan!
- Vergeet niet naam en studentnummer in te vullen op elke pagina
- Leg je collegekaart goed zichtbaar op tafel

- CONTROLEER DAT DIT TENTAMENFORMULIER BESTAAT UIT 5 PAGINA'S
- SLA HET TENTAMEN PAS OPEN WANNEER DAAR TOESTEMMING VOOR GEGEVEN WORDT

- LET OP: Neem in dit tentamen voor de grootte van de zwaartekrachtversnelling steeds $|\vec{g}| = 10\ \mathrm{m/s^2}$.

DEZE TABEL IS VOOR ADMINSTRATIEVE DOELEINDEN; NIET INVULLEN!

AAA	BBB	CCC	DDD	EEE	FFF	GGG	HHH	III	JJJ	KKK	LLL

VERSIE B... VERSIE B... VERSIE B... VERSIE B... VERSIE B... VERSIE B... VERSIE B

FACULTEIT DER BEWEGINGSWETENSCHAPPEN, VRIJE UNIVERSITEIT AMSTERDAM
TENTAMEN BIOMECHANICA 2013-2014, DEEL 1, 24 MAART 2014, VERSIE B

Naam: .... Studentnummer: ....

DEEL A: WAAR/ONWAAR VRAGEN (DIT DEEL BEPAALT 1/3 DEEL VAN HET CIJFER)

Instructie: lees elk van de volgende stellingen aandachtig door. Besluit of de stelling waar (W) of onwaar (O) is. Vul je antwoord in, **in de tabel onderaan de lijst met stellingen**; vul een W in voor waar, vul een O in voor onwaar.

1. Punt P maakt een beweging over een rechte lijn. De instantane snelheid van punt P is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van versnelling tegen tijd.

2. Punt P maakt een kromlijnige beweging in een 2D ruimte. De tangentiële versnellingsvector van punt P beïnvloedt wel de verandering van de grootte maar niet de verandering van de richting van de snelheidsvector van punt P.

3. We beschouwen een onvervormbaar wiel dat 'zuiver rolt' (er is geen sprake van slip); de grootte van de snelheid van het punt op het wiel dat in contact is met de weg is dan gelijk aan nul.

4. Elk van twee touwtrekkers trekt aan één van de uiteinden van een touw. Op een zeker tijdstip is het touw in evenwicht. De spankracht in het touw is op dat tijdstip overal gelijk aan nul.

5. Een turner vliegt door de lucht, waarbij we luchtwrijving verwaarlozen. De turner kan de baan van zijn massamiddelpunt tijdens deze vluchtfase beïnvloeden door zijn benen te buigen of te strekken.

6. Contactwrijvingskracht is een voorbeeld van een niet-lineaire veerkracht.

7. De luchtwrijvingskrachtvector op een fietser kan nooit dezelfde richting hebben als de snelheidsvector van de fietser ten opzichte van de aarde.

8. Als de som van alle krachten op een onvervormbaar lichaam gelijk is aan nul, dan is de som van alle momenten op dat lichaam ook gelijk aan nul.

9. Twee voorwerpen A en B glijden zonder te roteren over een horizontaal oppervlak. Er is geen luchtwrijving. Voor de contactwrijvingscoëfficiënten geldt $\mu_A = \mu_B$; voor de massa's geldt: $m_A \neq m_B$. De grootte van de versnelling van beide voorwerpen is dan gelijk.

10. Punt P maakt een beweging over een rechte lijn. De gemiddelde snelheid van punt P over een gegeven tijdsinterval is gelijk aan de verplaatsing tijdens dat tijdsinterval gedeeld door de duur van het tijdsinterval.

... ZIE VOLGENDE PAGINA VOOR DEEL B ...

Instructie: vul in de tabel hieronder voor elke stelling van DEEL A een W in voor waar of een O voor onwaar; toelichting is niet nodig!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

VERSIE B... VERSIE B... VERSIE B... VERSIE B... VERSIE B... VERSIE B... VERSIE B

FACULTEIT DER BEWEGINGSWETENSCHAPPEN, VRIJE UNIVERSITEIT AMSTERDAM
TENTAMEN BIOMECHANICA 2013-2014, DEEL 1, 24 MAART 2014, VERSIE B

Naam: .... Studentnummer: ....

DEEL B: BASISVAARDIGHEIDSVRAGEN (DIT DEEL BEPAALT 1/3 DEEL VAN HET CIJFER; ELK ONDERDEEL WEEGT HIER EVEN ZWAAR)

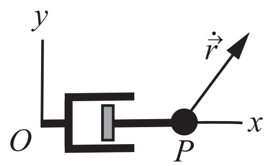
Instructie: lees elk van de volgende opgaven aandachtig door. Vul alleen het antwoord in, **in de tabel onderaan dit deel van het tentamen**; toelichting is niet nodig. Bij de beoordeling wordt uitsluitend naar het antwoord gekeken; wees dus zeer zorgvuldig bij het rekenwerk! Denk goed na over het teken van je antwoord, en over het verschil tussen een getal en een vector!

LET OP: Neem in dit tentamen voor de grootte van de zwaartekrachtversnelling steeds $|\vec{g}| = 10\ \text{m/s}^2$.

11. Een schip vaart vanuit een beginpositie eerst 2000 m naar het oosten en vervolgens 5000 m naar het zuidoosten. Tenslotte vaart hij x m in een onbekende richting. Zijn eindpositie is 5800 m zuiver ten oosten van zijn beginpositie. Bereken x (Geef 0 decimalen).

12. Een puntmassa ($m = 5.00$ kg) beweegt over een rechte lijn; de enige kracht op de puntmassa noemen we F; deze kracht is gericht langs de lijn waarover de puntmassa beweegt. De positie van de puntmassa hangt af van de tijd volgens $r(t) = \sin(6t)$.
Bereken F als $t = 1.00$ s. (Geef 2 decimalen.)

13. Een puntmassa P beweegt in een horizontaal vlak. Aan deze puntmassa is een massaloze lineaire demper ($b_{demper} = 30.00$ Ns/m) bevestigd waarvan het andere uiteinde vast is bevestigd in de oorsprong. Op een zeker tijdstip geldt voor de puntmassa: $\vec{r} = \begin{bmatrix} 1.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$ m en $\dot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} 3.00 \\ 4.00 \end{bmatrix}$ m/s; zie bijgaande figuur. Bereken de *krachtvector van de demper op de puntmassa* op dit tijdstip. (Geef 2 decimalen.)



14. Een slee met kind ($m_{slee+kind} = 30.00$ kg) bevindt zich op een horizontale sneeuwvlakte. Er is geen luchtwrijving. De contactwrijvingscoëfficiënt μ_w is gelijk aan 0.10. De snelheid van de slee is 0. Vanaf een zeker tijdstip wordt er via een touw zuiver horizontaal aan de slee getrokken met een constante kracht van 13.00 N. Bereken de *grootte van de contactwrijvingskracht* in deze situatie. (Geef 2 decimalen.)

... ZIE VOLGENDE PAGINA VOOR DEEL C ...

Instructie: vul in de tabel hieronder bij elke onderdeel van de vragen van DEEL B het door jou berekende antwoord in; toelichting is niet nodig!

11	12	13	14

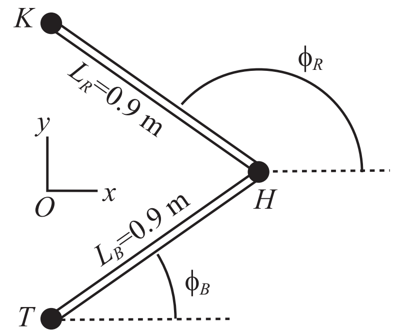
Naam: .... Studentnummer: ....

DEEL C: TOEPASSINGSVRAGEN (DIT DEEL BEPAALT 1/3 DEEL VAN HET CIJFER; ELK ONDERDEEL WEEGT HIER EVEN ZWAAR)

Instructie: Beantwoord deze vraagstukken OP DIT FORMULIER, DIRECT NA ELKE DEELVRAAG. Geef kort maar duidelijk aan hoe je tot het antwoord bent gekomen; doe je best om je antwoord steeds in strikt mechanische termen te formuleren; de goede aanpak levert hier punten op!

LET OP: Neem in dit tentamen voor de grootte van de zwaartekrachtversnelling steeds $|\vec{g}| = 10\ \mathrm{m/s^2}$

15. Een hoogspringer vliegt door de lucht; we modelleren deze in zijaanzicht als twee onvervormbare segmenten, verbonden door een scharniergewricht: het segment 'benen' B (lengte $L_B = 0.9$ m, massa $m_B = 30$ kg), dat loopt van tenen T naar heup H en het segment 'rest van het lichaam' R (lengte $L_R = 0.9$ m, massa $m_R = 50$ kg) dat loopt van heup H naar kruin K; zie bijgaande figuur. We nemen voor elk van beide segmenten aan dat de massa homogeen verdeeld is.



15a. Druk $\vec{r}_{c,B}$ (de plaatsvector van het massamiddelpunt van B) uit als functie van $\vec{r}_T$ en ϕ_B.

GEEF HIERONDER JE ANTWOORD OP BOVENSTAANDE VRAAG

15b. Op een zeker tijdstip geldt dat $\phi_B = \pi/3$ rad, $\phi_R = \pi/2$ rad. Verder geldt voor de snelheidsvector van K ten opzichte van T: $\dot{\vec{r}}_{K/T} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$ m/s. Bereken voor dit tijdstip $\dot{\phi}_B$ en $\dot{\phi}_R$. (Hint: druk hiertoe eerst $\dot{\vec{r}}_{K/T}$ uit in ϕ_B, ϕ_R, $\dot{\phi}_B$ en $\dot{\phi}_R$.)

GEEF HIERONDER JE ANTWOORD OP BOVENSTAANDE VRAAG

... ZIE VOLGENDE PAGINA VOOR VERVOLG DEEL C ...

FACULTEIT DER BEWEGINGSWETENSCHAPPEN, VRIJE UNIVERSITEIT AMSTERDAM
TENTAMEN BIOMECHANICA 2013-2014, DEEL 1, 24 MAART 2014, VERSIE B

Naam: .... Studentnummer: ....

16. Een bal (straal $R = 0.1$ m, massa $m = 0.5$ kg) wordt omhoog gegooid; we beschrijven de balvlucht ten opzichte van een assenstelsel waarvan de y-as tegen de zwaartekracht in wijst en waarvan de oorsprong op het aardoppervlak ligt. Op het tijdstip waarop de bal de handen verlaat, geldt voor de plaats- en snelheidsvector van het massamiddelpunt c: $r_c = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$ m en $\dot{\vec{r}}_c = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 8.0 \end{bmatrix}$ m/s.

16a. Als er geen sprake zou zijn van luchtwrijving, bereken dan de verticale snelheid van het massamiddelpunt van de bal op het tijdstip waarop de bal de grond raakt.

GEEF HIERONDER JE ANTWOORD OP BOVENSTAANDE VRAAG

16b. In werkelijkheid is er natuurlijk wel luchtwrijving. We vergelijken nu twee situaties: in situatie A is het windstil; in situatie B geldt $v_{lucht,x} \neq 0$ en $v_{lucht,y} = 0$; de wind waait dus evenwijdig aan het aardoppervlak. We gooien de bal in beide situaties met dezelfde beginsnelheid verticaal omhoog. Leg op mechanische gronden uit of de maximale hoogte van de bal in situatie B (het waait) kleiner, gelijk aan of groter is dan de maximale hoogte in situatie A (het is windstil). Licht je antwoord toe aan de hand van de relevante vergelijking(en).

GEEF HIERONDER JE ANTWOORD OP BOVENSTAANDE VRAAG

... EINDE TENTAMEN ...

ANTWOORDEN EN UITWERKING

DEEL A

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
O	W	W	O	O	O	O	O	W	W

VERSIE B... VERSIE B... VERSIE B... VERSIE B... VERSIE B... VERSIE B... VERSIE B

DEEL B

11	12	13	14
3545	50.29	$\begin{bmatrix} -90.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$	13.00

VERSIE B... VERSIE B... VERSIE B... VERSIE B... VERSIE B... VERSIE B... VERSIE B

11. We noemen de deelverplaatsingen $\Delta\vec{r}_1$, $\Delta\vec{r}_2$ en $\Delta\vec{r}_3$, en de totale verplaatsing $\Delta\vec{r}_{tot}$. We kiezen een assenstelsel waarbij de positieve x-as naar het oosten en de positieve y-as naar het noorden wijst. Er geldt dan dat $\Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2 + \Delta\vec{r}_3 = \Delta\vec{r}_{tot}$ en dus:
$\begin{bmatrix} 2000 \\ 0 \end{bmatrix} + 5000 \cdot \begin{bmatrix} \cos(-\pi/4) \\ \sin(-\pi/4) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta r_{3,x} \\ \Delta r_{3,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5800 \\ 0 \end{bmatrix}$
en dus:
$\begin{bmatrix} \Delta r_{3,x} \\ \Delta r_{3,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5800 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2000 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2500 \cdot \sqrt{2} \\ -2500 \cdot \sqrt{2} \end{bmatrix}$
en dus:
$\begin{bmatrix} \Delta r_{3,x} \\ \Delta r_{3,y} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 264 \\ 3536 \end{bmatrix}$ m
De gevraagde x is de lengte van de vector $\Delta\vec{r}_3$, en dus $x \approx \sqrt{264^2 + 3536^2} \approx 3545$ m.

12. De krachtenvergelijking voor de puntmassa is:
$F(t) = m \cdot \ddot{r}(t)$
en dus
$F(t) = m \cdot (-36 \cdot \sin(6t))$
en dus $F(1) = 5 \cdot (-36 \cdot \sin(6 \cdot 1)) \approx 50.29$ N

13. De kracht in een demper staat in de richting van de demper; in dit geval is een eenheidsvector in de richting van de demper snel gevonden: $e_{demper} = \begin{bmatrix} 1.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$. De waarde van de demperkracht is gelijk aan minus demperconstante maal tijdsafgeleide van de lengte van de demper. Hieruit volgt:
$F_{demper} = -b_{demper} \cdot \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{|\vec{r}|} = -30 \cdot (1.00 \cdot 3.00 + 0.00 \cdot 4.00)/1.00 = -90.00$ N. En daarmee wordt de demperkrachtvector:
$\vec{F}_{demper} = -90.00 \cdot \begin{bmatrix} 1.00 \\ 0.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -90.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$ N.

14. De krachtenvergelijking in verticale y-richting leert dat $G_y + F_{N,y} = m \cdot 0$ en dus $F_{N,y} = -m \cdot g = 300.00$ N. Dit betekent dat $F_{W max} = \mu_w \cdot |F_{N,y}| = 0.1 \cdot 300.00 = 30.00$ N. Omdat de snelheid gelijk is aan nul volgt hieruit dat de grootte van de feitelijke wrijvingskrachtvector ergens tussen 0 en 30.00 N ligt. De enige andere kracht in de x-richting is de trekkracht; deze heeft een grootte van 13 N, en is daarmee kleiner dan de maximale wrijvingskracht; hieruit volgt dat de grootte van de feitelijke wrijvingskracht gelijk moet zijn aan 13.00 N.

DEEL C

15a
We noemen het massamiddelpunt van de benen c_B; er geldt dan dat $\vec{r}_{c,B} = \vec{r}_T + \vec{r}_{c,B/T}$; de laatste term betreft de cirkelbeweging van het massamiddelpunt t.o.v. T, en dus:
$\vec{r}_{c,B} = \vec{r}_T + \begin{bmatrix} 0.45 \cdot \cos(\phi_B) \\ 0.45 \cdot \sin(\phi_B) \end{bmatrix}$

15b
We bepalen eerst hoe de relatieve positie $\vec{r}_{K/T}$ afhangt van beide hoeken:
$\vec{r}_{K/T} = 0.9 \cdot \begin{bmatrix} \cos(\phi_B) \\ \sin(\phi_B) \end{bmatrix} + 0.9 \cdot \begin{bmatrix} \cos(\phi_R) \\ \sin(\phi_R) \end{bmatrix}$
Vervolgens differentiëren we deze uitdrukking naar de tijd:
$\dot{\vec{r}}_{K/T} = 0.9 \cdot \dot{\phi}_B \cdot \begin{bmatrix} -\sin(\phi_B) \\ \cos(\phi_B) \end{bmatrix} + 0.9 \cdot \dot{\phi}_R \cdot \begin{bmatrix} -\sin(\phi_R) \\ \cos(\phi_R) \end{bmatrix}$
Invullen van alle gegevens en enig vereenvoudigen levert:
$\frac{1}{0.9} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \dot{\phi}_B \cdot \begin{bmatrix} -0.5 \cdot \sqrt{3} \\ 0.5 \end{bmatrix} + \dot{\phi}_R \cdot \begin{bmatrix} -1.0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Dit zijn twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden; oplossen levert $\dot{\phi}_B \approx 1.11 \text{ rad/s}, \dot{\phi}_R \approx -1.52 \text{ rad/s}$

16a
We noemen $t = 0$ het tijdstip van verlaten van de hand; voor verticale versnelling, snelheid en positie van het massamiddelpunt als functie van tijd vinden we dan:
$\ddot{r}_{c,y}(t) = -10$
$\dot{r}_{c,y}(t) = -10 \cdot t + 8.0$
$r_{c,y}(t) = -5 \cdot t^2 + 8.0 \cdot t + 1.0$
Uit $R = 0.1$ volgt dat als de bal de grond raakt geldt dat $r_{c,y} = 0.1$. Het tijdstip t_1 waarop dit gebeurt vinden we uit de plaatsvergelijking:
$0.1 = -5 \cdot t_1^2 + 8.0 \cdot t_1 + 1.0$; oplossen met ABC formule levert $t_1 \approx 1.706 \text{ s}$. Invullen van deze waarde voor t_1 in de snelheidsvergelijking levert de gevraagde snelheid op het tijdstip van raken van de grond:
$\dot{r}_{c,y}(t_1) = -10 \cdot t_1 + 8.0 \approx -9.06 \text{ m/s}$

16b
De relevante vergelijking voor de luchtwrijvingskrachtvector is:
$\vec{F}_{lucht} = -c_{lucht} \cdot \vec{v}_{bal/lucht} \cdot |\vec{v}_{bal/lucht}|$
De hoogte die de bal bereikt hangt natuurlijk uitsluitend af van de verticale component van de luchtwrijvingskracht; hoe groter die (in absolute zin) is, des te minder hoog komt de bal. Uitwerken van bovenstaande vergelijking voor de y-richting levert:
$F_{lucht,y} = -c_{lucht} \cdot v_{bal/lucht,y} \cdot |\vec{v}_{bal/lucht}|$
We beschouwen als voorbeeld de beginsituatie; in die situatie verschilt alleen de laatste term tussen situaties A en B en wel in die zin dat hoe harder het waait, des te groter die laatste term is. Voor de fase waarin de bal omhoog beweegt betekent dit dat de naar beneden gerichte verticale component van de luchtwrijvingskracht als het waait groter is dan als het niet waait; daaruit volgt dat de neerwaartse versnelling van de bal als het waait groter is dan als het niet waait; daaruit volgt dat de bal minder hoog zal komen als het waait!